Bull. Sci. math. 124, 3 (2000) 193–211

VARIÉTÉS CAUCHY–RIEMANN HOMOGÈNES ET ENVELOPPES HOLOMORPHES

PAR

KARL OELJEKLAUS [a,1], CHRISTINE SACRÉ [b,2]

[a] *UMR-CNRS(LATP) 6632 et Université de Provence, CMI (U.F.R. M.I.M.), 39, rue Joliot-Curie, F-13453 Marseille Cedex, France*

[b] *URA-CNRS(GAT) 751 et Université de Lille I, U.F.R. de Mathématiques, F-59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex, France*

Manuscrit présenté par G. HENKIN, reçu en Mars 1998, révisé en Novembre 1998

1. Introduction

Soit G un groupe de Lie complexe connexe simplement connexe et L une forme réelle de G. On considère un domaine $\Omega \subset G$ invariant par l'action à gauche de L sur G. Dans le cas où G est abélien, des théorèmes classiques sur des domaines tubes et de Reinhardt caractérisent géométriquement quand un domaine invariant est de Stein.

Dans [14], O.S. Rothaus a commencé l'étude du cas non-abélien. Il suppose que G est un groupe de Lie complexe réductif et $K \subset G$ est une forme réelle *compacte* et démontre qu'un domaine de Stein K-invariant (à gauche) $\Omega \subset G$ admet un quotient géodésiquement convexe dans $K\backslash G$.

J.J. Loeb [10] donne ensuite un exemple qui montre que la condition de convexité géodésique du quotient de Ω n'est pas suffisante, pour que Ω soit de Stein.

Dans [3], G. Fels caractérise enfin les domaines K-invariants de Stein $\Omega \subset G$ dans un groupe complexe réductif par une condition de géométrie différentielle sur le bord $\partial\Omega$.

[1] E-mail: karloelj@gyptis.univ-mrs.fr.
[2] E-mail: Christine.Sacre@univ-lille1.fr.

D’autres résultats concernant des domaines et des fonctions strictement plurisousharmoniques K-invariants dans les groupes de Lie complexes réductifs se trouvent dans [1,4,7,11] et leurs références. Pour les cas nilpotent et résoluble voir [6,11].

Le but de ce papier est de construire une classe particulière de domaines K-invariants dans un groupe de Lie complexe semi-simple.

Soit S un tel groupe de Lie, K un sous-groupe maximal compact de S et D un sous-groupe de Cartan de S. On considère la variété complexe homogène $X = S/D$, qui est d’après un théorème classique de Y. Matsushima [12] une variété de Stein. Pour un point $x \in X$, la K-orbite $K(x) \subset X$ est une sous-variété Cauchy–Riemann (CR) compacte génératrice. La structure de Cauchy–Riemann de $K(x)$ dépend du point choisi $x \in X$. Nous étudions l’enveloppe holomorphiquement convexe

$$\widehat{K(x)} := \left\{ y \in X \mid \forall f \in \mathcal{O}(X),\ \left|f(y)\right| \leqslant \max_{K(x)} |f| \right\}$$

de $K(x)$ et montrons le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. – *Soit U l’ensemble des $x \in X$ tels que l’intérieur $\Omega(x)$ de l’enveloppe holomorphiquement convexe $\widehat{K(x)}$ soit non-vide. Alors* :

1° *U est un ouvert dense de X.*

2° *si $x \in U$, l’ouvert $\Omega(x)$ est connexe, de Stein et l’adhérence $\overline{\Omega(x)}$ est égale à $\widehat{K(x)}$.*

3° *pour tout $x \in X$, l’enveloppe $\widehat{K(x)}$ contient l’unique K-orbite totalement réelle, qui est holomorphiquement convexe.*

Afin de démontrer ce résultat nous donnons dans la première section plusieurs caractérisations équivalentes d’une variété Cauchy–Riemann homogène sous l’action d’un groupe de Lie réel. Il se trouve que les structures CR invariantes sur une variété homogène G/H sont en correspondance biunivoque avec les sous-algèbres de Lie complexes de l’algèbre de Lie de G complexifiée satisfaisant à certaines conditions. Ensuite, nous rappelons des résultats généraux sur les variétés CR plongées dans une variété complexe, en particulier le théorème de A. Tumanov [17].

La troisième section est consacrée à l’étude des enveloppes holomorphiquement convexes et à la démonstration du résultat principal. Dans le cas où $S = SL(n, \mathbb{C})$, quelques résultats partiels avaient été démontrés par le second auteur (voir [15]) en utilisant des méthodes différentes.

2. Variétés Cauchy–Riemann homogènes et extension des fonctions CR

Soit G un groupe de Lie réel, $H \subset G$ un sous-groupe fermé de G et $M = G/H$ la variété homogène associée à H et G. Le groupe G agit sur M par multiplication à gauche et pour $g \in G$, on note λ_g l'application : $M \to M$, $m \mapsto gm$. Soit n la dimension réelle de M et $TM \otimes \mathbb{C}$ la complexification du fibré tangent réel de M.

DÉFINITION 2.1. – *Un sous-fibré vectoriel complexe $Q \subset TM \otimes \mathbb{C}$ de rang k est appelé* structure Cauchy–Riemann (CR) invariante *sur M de type (n,k) si les conditions suivantes sont satisfaites* :

(1) *Q est involutif, c'est-à-dire $[X,Y] \in \Gamma(M,Q)$ pour tous $X, Y \in \Gamma(M,Q)$;*

(2) *$Q_m \cap \overline{Q_m} = 0$ pour tout m de M (ici $\overline{X_m \otimes \lambda} = X_m \otimes \bar{\lambda}$ pour $X_m \in T_mM$, $\lambda \in \mathbb{C}$) ;*

(3) *$d\lambda_g(Q_m) = Q_{\lambda_g(m)}$ pour tout g de G, où la différentielle $d\lambda_g$ au point m est prolongée naturellement aux complexifiés* :

$$T_mM \otimes \mathbb{C} \to T_{\lambda_g(m)}M \otimes \mathbb{C}.$$

Le couple $(M = G/H, Q)$ est alors appelé variété CR *homogène de type (n,k).*

Les propriétés (1) et (2) définissent une structure CR sur M ; la propriété (3) donne l'invariance de cette structure par l'action du groupe G.

LEMME 2.1. – *La donnée d'une structure* CR *invariante Q de type (n,k) sur la variété homogène $M = G/H$ est équivalente à la donnée d'une paire (R, J) où R est un sous-fibré réel de TM de rang $2k$ et $J : R \to R$ est un morphisme de fibré vérifiant* :

(1′) *$[X,Y] - [JX,JY] \in \Gamma(M,R)$ et $J([X,Y] - [JX,JY]) - [X,JY] - [JX,Y] = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(M,R)$;*

(2′) *$J^2 = -Id_R$;*

(3′) *$d\lambda_g(R_m) = R_{\lambda_g(m)}$ et $d\lambda_g \circ J_m = J_{\lambda_g(m)} \circ d\lambda_g$ pour tout g de G.*

Démonstration. – Etant donné (R, J), on pose

$$Q_m = \{X_m - i J_m X_m \mid X_m \in R_m\}$$

pour chaque m de M ; réciproquement, étant donné Q, on pose

$$R_m = \left\{X'_m + \overline{X'_m} \mid X'_m \in Q_m\right\} = \Re e(Q_m)$$

et

$$J_m\left(X'_m + \overline{X'_m}\right) = i\left(X'_m - \overline{X'_m}\right)$$

et on montre facilement les équivalences. □

Notons maintenant $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$) l'algèbre de Lie de G (resp. de H). Le résultat suivant permet d'utiliser les propriétés des algèbres de Lie pour étudier des variétés CR homogènes.

LEMME 2.2. – *Les structures* CR *invariantes Q sur $M = G/H$ sont en correspondance biunivoque avec les sous-algèbres de Lie complexes $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ telles que :*
 (i) $\mathfrak{j} \cap \overline{\mathfrak{j}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$;
 (ii) $\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{j}) = \mathfrak{j}$ *pour tout $h \in H$* ($\mathrm{Ad}_h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *étant prolongée naturellement sur* $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$).

Avant de démontrer ce lemme nous citons le résultat suivant :

LEMME 2.3 ([13]). – *Les structures* CR *invariantes (R, J) sur $M = G/H$ sont en correspondance biunivoque avec les paires $(\widetilde{R}, \widetilde{J})$, où $\widetilde{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ et $\widetilde{J}$ est un endomorphisme de fibrés*

$$\widetilde{J} : \widetilde{R} \to \widetilde{R}$$

vérifiant :
 (i′) $\widetilde{J}X = 0$ *si et seulement si* $X \in \mathfrak{h}$;
 (ii′) $\widetilde{J}^2 X + X \in \mathfrak{h}$ *pour tout* $X \in \widetilde{R}$;
 (iii′) $\mathrm{Ad}_h(\widetilde{R}) \subset \widetilde{R}$ *et* $\mathrm{Ad}_h \widetilde{J}X - \widetilde{J}\,\mathrm{Ad}_h X \in \mathfrak{h}$ *pour tout* $h \in H$, $X \in \widetilde{R}$;
 (iv′) $[X, Y] - [\widetilde{J}X, \widetilde{J}Y] \in \widetilde{R}$ *et* $\widetilde{J}([X, Y] - [\widetilde{J}X, \widetilde{J}Y]) - [X, \widetilde{J}Y] - [\widetilde{J}X, Y] \in \mathfrak{h}$ *pour tous* $X, Y \in \widetilde{R}$.

Deux structures $(\widetilde{R}, \widetilde{J})$ et $(\widetilde{R'}, \widetilde{J}')$ sont identifiées si $\widetilde{R} = \widetilde{R'}$ et $\widetilde{J}X - \widetilde{J}'X \in \mathfrak{h}$ pour tout $X \in \widetilde{R}$.

L'équivalence entre ces deux derniers lemmes se montre comme suit :

(a) étant donné $(\widetilde{R}, \widetilde{J})$, on pose $\mathfrak{j} = \{1/2(X - i\widetilde{J}X) \mid X \in \widetilde{R}\} + (\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})$;

(b) réciproquement, étant donné $\mathfrak{j}$, on pose $\widetilde{R} = \{X' + \overline{X'} \mid X' \in \mathfrak{j}\} = \Re e(\mathfrak{j})$. On choisit ensuite un sous-espace vectoriel V supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\widetilde{R}$, c.a.d. $\widetilde{R} = V \oplus \mathfrak{h}$. Soit pr_V la projection sur V par rapport à cette décomposition. Pour $X \in \widetilde{R}$, $X = X' + \overline{X'}$, $X' \in \mathfrak{j}$, on pose $\widetilde{J}X = pr_V(i(X' - \overline{X'}))$.

Il n'est alors pas difficile de vérifier l'équivalence des propriétés données pour $\mathfrak{j}$ et $(\widetilde{R}, \widetilde{J})$.

Nous continuons avec la preuve du Lemme 2.2 en suivant les idées de [13].

Démonstration du Lemme 2.2. – Soit e l'élément neutre de G,

$$\pi : G \to G/H$$

la projection canonique, $0 := \pi(e)$ et

$$d\pi_e : T_eG \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \to T_0M \otimes \mathbb{C}$$

la différentielle prolongée naturellement aux complexifiés.

(a) Etant donné $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ avec les propriétés indiquées, on définit

$$Q_0 := d\pi_e(\mathfrak{j}).$$

Le noyau $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ de $d\pi_e$ étant inclus dans $\mathfrak{j}$, on a $\mathfrak{j} = (d\pi_e)^{-1}(Q_0)$. Pour $g \in G$ on pose $Q_{\pi(g)} = d\lambda_g(Q_0)$. Pour $h \in H$ et $a \in G$, on a

$$\lambda_h\pi(a) = h \cdot aH = hah^{-1}hH = hah^{-1}H = \pi(\mathrm{int}_h\, a)$$

où $\mathrm{int}_h : G \to G$ est donné par $\mathrm{int}_h(a) = hah^{-1}$. Comme $\mathrm{Ad}_h = d(\mathrm{int}_h)_e$, on obtient :

$$(*) \qquad d\lambda_h \circ d\pi_e = d\pi_e \circ \mathrm{Ad}_h, \quad \text{pour tout } h \in H,$$

ce qui montre grâce à (ii) que $Q_{\pi(g)}$ est bien défini. Par construction, Q est un sous-fibré complexe de $TM \otimes \mathbb{C}$ vérifiant (3). La propriété (2) découle immédiatement de (i) : $\mathfrak{j} \cap \overline{\mathfrak{j}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$.

(b) Réciproquement, étant donné $Q \subset TM \otimes \mathbb{C}$ avec les propriétés indiquées, on définit $\mathfrak{j} = (d\pi_e)^{-1}(Q_0) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. L'espace $\mathfrak{j}$ est alors un sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ et les propriétés (i) et (ii) découlent immédiatement de (2) et (3) en utilisant (*).

Il reste à démontrer que l'involutivité de Q correspond au fait que $\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre. On définit le sous-fibré $\widetilde{Q}$ de $TG \otimes \mathbb{C}$ par $\widetilde{Q}_g = dl_g(\mathfrak{j})$, où l_g est la multiplication à gauche par $g \in G$ et dl_g sa différentielle en e prolongée naturellement à $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Il en résulte

$$\lambda_g \circ \pi = \pi \circ l_g$$

et

$$\widetilde{Q}_e = \mathfrak{j} = (d\pi_e)^{-1}(Q_0)$$

et alors $\widetilde{Q} = (d\pi)^{-1}(Q)$. Soit $P(G)$ l'ensemble des champs de vecteurs $X \in \Gamma(G, TG \otimes \mathbb{C})$ projetables, c'est-à-dire tels qu'il existe $Y \in \Gamma(M, TM \otimes \mathbb{C})$ avec $d\pi(X(g)) = Y(\pi(g))$ pour tout $g \in G$. L'application $d\pi : P(G) \to \Gamma(M, TM \otimes \mathbb{C})$ est surjective, car il existe une connexion dans le fibré principal $G \to G/H$. Puisque le fibré $\widetilde{Q}$ est saturé (c'est-à-dire $(d\pi)^{-1}(d\pi\,\widetilde{Q}) = \widetilde{Q}$), l'application

$$d\pi : P(G) \cap \Gamma(G, \widetilde{Q}) \to \Gamma(M, Q)$$

est surjective. On pose $P(\widetilde{Q}) = P(G) \cap \Gamma(G, \widetilde{Q})$. L'ensemble $P(G)$ est une sous-algèbre de Lie de $\Gamma(G, TG \otimes \mathbb{C})$ et $d\pi : P(G) \to \Gamma(M, TM \otimes \mathbb{C})$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie (voir [9]). Soit Φ la projection

$$TG \otimes \mathbb{C} \to (TG \otimes \mathbb{C})/\widetilde{Q}.$$

On définit une application linéaire

$$\alpha : \widetilde{Q} \times \widetilde{Q} \to (TG \otimes \mathbb{C})/\widetilde{Q}$$

comme suit : pour $a, b \in \widetilde{Q}_g$, choisissons $X, Y \in \Gamma(G, \widetilde{Q})$ avec $X(g) = a$ et $Y(g) = b$, et posons

$$\alpha(a, b) = \Phi\big([X, Y](g)\big).$$

Soient $X_1, \ldots, X_m \in \Gamma(G, \widetilde{Q})$ tels que $(X_1(g), \ldots, X_m(g))$ soit une base de $\widetilde{Q}_g$ et $X = \sum_{i=1}^m f_i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^m h_j X_j$, où $f_i, h_j \in C^\infty(G)$. On a alors

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{n} f_i X_i(h_j) X_j - h_j X_j(f_i) X_i + f_i h_j [X_i, X_j].$$

Ceci montre que $\Phi([X, Y](g))$ ne dépend que des valeurs $f_i(g) h_j(g)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, et donc que $\alpha : \widetilde{Q} \times \widetilde{Q} \to (TG \otimes \mathbb{C})/\widetilde{Q}$ est bien définie.

L'application α est invariante à gauche : si $a = dl_g(a_e)$ et $b = dl_g(b_e)$, alors $\alpha(a, b) = \alpha(a_e, b_e)$. Donc $\alpha = 0$ si et seulement si $\alpha = 0$ sur $\widetilde{Q}_e \times \widetilde{Q}_e$, c'est-à-dire si $\widetilde{Q}_e = \mathfrak{j}$ est une algèbre de Lie. D'autre part, on a $\alpha(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in P(\widetilde{Q})$ si et seulement si Q est involutif.

Pour terminer la preuve, il reste à montrer que les champs de vecteurs de $P(\widetilde{Q})$ engendrent l'espace vectoriel $\widetilde{Q}_g$ en tout point. Soit $g \in G$ et $v \in \widetilde{Q}_g$. On choisit un champ de vecteurs $\xi \in \Gamma(M, Q)$ avec $\xi(\pi(g)) = d\pi_g(v)$ et un champ de vecteurs $X \in P(\widetilde{Q})$ avec $d\pi(X) = \xi$. Alors $d\pi_g(X(g)) = \xi(\pi(g))$ donc $X(g) - v \in \operatorname{Ker} d\pi_g = T_g H \times \mathbb{C} \subset \widetilde{Q}_g$. On construit un champ de vecteurs Y invariant à gauche sur G tel que $Y(g) = X(g) - v$. On a alors $Y \in \Gamma(G, \widetilde{Q})$ et $d\pi(Y) = 0$, donc $X - Y \in P(\widetilde{Q})$. $\square$

Remarque 2.1. – (1) On a démontré le résultat plus général : soit Q un sous-fibré complexe G-invariant de $TM \otimes \mathbb{C}$ et $\mathfrak{j} = (d\pi_e)^{-1}(Q_0)$, alors $\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Lie complexe de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ si et seulement si Q est involutif.

(2) Dans le cas particulier où $X = G^{\mathbb{C}}/L$ est une variété complexe homogène, G est une forme réelle de $G^{\mathbb{C}}$ et la variété CR homogène $M := G/G \cap L$ est la G-orbite de $L \in G^{\mathbb{C}}/L$ avec la structure CR induite, un calcul élémentaire montre que l'algèbre de Lie complexe correspondante à la structure CR est isomorphe au conjugué complexe $\bar{\mathfrak{l}}$ de l'algèbre $\mathfrak{l}$ de L.

Soit $(M = G/H, Q)$ une variété CR homogène avec algèbre correspondante $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Soit $E = Q \oplus \overline{Q}$ le sous-fibré complexe de $TM \otimes \mathbb{C}$ engendré par Q et $\bar{Q}$. Le rang complexe de E est égal à $2k$ et le fibré E est encore invariant, c'est-à-dire $d\lambda_g(E_m) = E_{\lambda_g(m)}$ pour tout $g \in G$, $m \in M$. Considérons le sous-ensemble $\widetilde{E}$ de $TM \otimes \mathbb{C}$ engendré par toutes les sections de la forme $[X_1,[X_2,\ldots,[X_{r-1},X_r]]]$, où $X_1,\ldots X_r\in\Gamma(M,E)$. L'homogénéité assure que $\widetilde{E}$ est un sous-fibré complexe invariant de $TM\otimes\mathbb{C}$ avec $\overline{\widetilde{E}}=\widetilde{E}$.

LEMME 2.4. – *Soit $\widetilde{\mathfrak{j}}$ la plus petite sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ contenant le sous-espace $\mathfrak{j}+\bar{\mathfrak{j}}$. L'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{j}}$ a les propriétés suivantes* :

(a) $Ad_h(\widetilde{\mathfrak{j}})=\widetilde{\mathfrak{j}}$ *pour tout* $h\in H$;
(b) $(d\pi_e)^{-1}(\widetilde{E_0})=\widetilde{\mathfrak{j}}$;
(c) $\dim_{\mathbb{C}}\widetilde{\mathfrak{j}}-\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}+\bar{\mathfrak{j}})=\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\widetilde{E}-2k$.

Démonstration. – L'algèbre $\widetilde{\mathfrak{j}}$ est engendrée par les crochets d'éléments de $\mathfrak{j}$ et $\bar{\mathfrak{j}}$. Pour montrer que $\mathrm{Ad}_h(\widetilde{\mathfrak{j}})=\widetilde{\mathfrak{j}}$, il suffit de montrer que pour $g\otimes\lambda,\ g'\otimes\overline{\lambda'}\in\mathfrak{j}$, on a

$$\mathrm{Ad}_h\big[g\otimes\lambda,g'\otimes\lambda'\big]\in\widetilde{\mathfrak{j}}.$$

Or

$$\mathrm{Ad}_h\big[g\otimes\lambda,g'\otimes\lambda'\big]=\big[\mathrm{Ad}_h(g\otimes\lambda),\mathrm{Ad}_h(g'\otimes\lambda')\big]\in[\mathfrak{j},\bar{\mathfrak{j}}]\subset\widetilde{\mathfrak{j}},$$

puisque $\mathfrak{j}$ et $\bar{\mathfrak{j}}$ satisfont à la propriété (ii) du Lemme 2.2.

Montrons maintenant que $\widetilde{\mathfrak{j}}=(d\pi_e)^{-1}(\widetilde{E_0})$. On a $\mathfrak{j}=(d\pi_e)^{-1}(Q_0)$, donc $\bar{\mathfrak{j}}=(d\pi_e)^{-1}(\overline{Q_0})$ et

$$\mathfrak{j}+\bar{\mathfrak{j}}=(d\pi_e)^{-1}\big(Q_0+\overline{Q_0}\big)=(d\pi_e)^{-1}(E_0)\subset(d\pi_e)^{-1}\big(\widetilde{E_0}\big).$$

Le fibré $\widetilde{E}\subset TM\otimes\mathbb{C}$ est involutif par construction. D'après la remarque suivant la démonstration du Lemme 2.2, $(d\pi_e)^{-1}(\widetilde{E_0})$ est une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ ce qui montre $\widetilde{\mathfrak{j}}\subset(d\pi_e)^{-1}(\widetilde{E_0})$.

Réciproquement, posons $E_0'=d\pi_e(\widetilde{\mathfrak{j}})$. Il est clair que $Q_0\oplus\overline{Q_0}\subset E_0'$. De même que dans la démonstration du Lemme 2.2, on construit un sous-fibré invariant E' de $TM\otimes\mathbb{C}$ dont $Q\oplus\overline{Q}$ est un sous-fibré. Par conséquent, $\widetilde{E}$ est un sous-fibré de E'. Il s'ensuit, en prenant la fibre en 0 : $\widetilde{E_0}\subset E_0'=d\pi_e(\widetilde{\mathfrak{j}})$. Alors $(d\pi_e)^{-1}(\widetilde{E_0})\subset\widetilde{\mathfrak{j}}$. □

Nous rappelons maintenant quelques résultats concernant l'extension des fonctions CR.

DÉFINITION 2.2 (Greenfield [5]). – *On appelle* $\mathrm{exdim}(M):=\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\widetilde{E}-2k$ *la dimension d'excès de la variété* CR $(M=G/H,Q)$.

Soit X une variété complexe avec $\dim_{\mathbb{C}} X = m + k$ et $J : TX \to TX$ sa structure complexe. Soit M une sous-variété réelle lisse plongée dans X telle que $\dim_{\mathbb{R}}(T_pM \cap J_p(T_pM))$ ne dépende pas de $p \in M$. Alors $(R = TM \cap J(TM), J|_R)$ est une structure CR sur M appelée *structure* CR *induite* par X sur M. On suppose de plus que $\dim_{\mathbb{R}} M = m + 2k$ et que R est de rang $2k$, c'est-à-dire $(M, R = TM \cap J(TM), J_{|R})$ est une variété CR de type $(m + 2k, k)$. Pour tout p de M, $T_pM + J_p(T_pM) = T_pX$. La variété M est appelée *sous-variété* CR *génératrice* de X.

Pour tout p de M, il existe un système de coordonnées locales $(z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^k$ avec origine en p tel que M soit définie au voisinage de p par l'équation $x = h(w, y)$, où $z = x + iy \in \mathbb{C}^m$, $w \in \mathbb{C}^k$, h est une fonction régulière au voisinage de zéro dans $\mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $h(0, 0) = 0$ et $dh(0, 0) = 0$. On note

$$W(U, C) = \{(z, w) \in U \mid x - h(w, y) \in C\},$$

où U est un voisinage de zéro dans $\mathbb{C}^{m+k}$ et C est un cône ouvert convexe dans $\mathbb{R}^m$.

DÉFINITION 2.3. – *Soit $p \in M$. La variété M est dite* W-extensible *en p s'il existe un système de coordonnées locales $(z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^k$ avec origine en p, un voisinage U et un cône C comme ci-dessus tels que toute fonction* CR *continue f sur M s'étende en une fonction F continue sur $\overline{W(U, C)}$ et holomorphe sur $W(U, C)$.*

DÉFINITION 2.4. – *Soit $p \in M$. La variété M est dite* minimale *en p s'il n'existe pas de sous-variété* CR *N de M contenant p de type* $(\dim N, k)$ *avec* $\dim N < \dim M$.

A.E. Tumanov a démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1 ([17]). – *Si la variété M est minimale en p, alors elle est W-extensible en p.*

DÉFINITION 2.5. – *La variété M est dite de* type fini s *en p si T_pM est engendré par des vecteurs de la forme $[X_1, [X_2, \ldots, [X_{r-1}, X_r]]](p)$, où $r \leqslant s$, $X_1, \ldots, X_r \in \Gamma(M, R = TM \cap J(TM))$ et s est le plus petit entier avec cette propriété.*

Il découle immédiatement des définitions que si M est de type fini en p, elle est minimale en p. Donc :

COROLLAIRE 2.1 ([17]). – *Si M est de type fini en p, alors M est W-extensible en p.*

LEMME 2.5. – *Soit M une sous-variété* CR *génératrice compacte de type (n,k) d'une variété complexe X de dimension $n-k$. On suppose de plus que la variété M est* CR *homogène pour cette structure induite par X. Si* $\operatorname{exdim} M = n-2k$, *c'est-à-dire que* $\operatorname{exdim} M$ *est maximal, alors l'ensemble $\widehat{M}$ défini par*

$$\widehat{M} = \left\{ p \in X \mid \forall f \in \mathcal{O}(X),\ \left|f(p)\right| \leqslant \max_M |f| \right\}$$

est d'intérieur Ω non-vide et $M \subset \overline{\Omega}$.

Démonstration. – L'hypothèse $\operatorname{exdim} M = n-2k$ implique que M est de type fini en tout point $p \in M$. D'après le corollaire précédent, M est W-extensible en p. Soit $W(U,C)$ un ouvert satisfaisant à la W-extensibilité en p et soit $q \in W(U,C)$. Supposons $q \notin \widehat{M}$. Il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $|f(q)| > \max_M |f|$. La fonction g définie par

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - f(q)}$$

est holomorphe dans un voisinage de M et en particulier CR sur M. Or, elle ne se prolonge pas en une fonction continue sur $\overline{W(U,C)}$ et holomorphe sur $W(U,C)$. Cette contradiction implique que $W(U,C) \subset \widehat{M}$ et que l'intérieur Ω de M est non vide. De plus, $p \in \overline{W(U,C)}$ et alors $p \in \overline{\Omega}$. Ceci étant vrai pour tout p de M, nous avons $M \subset \overline{\Omega}$. □

3. Enveloppes holomorphiquement convexes dans des variétés homogènes sous l'action d'un groupe de Lie semi-simple

Soit S un groupe de Lie connexe complexe semi-simple. Soit $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie et n sa dimension complexe. Soit D un sous-groupe de Cartan de S, c'est-à-dire un sous-groupe maximal abélien tel que pour tout $g \in D$, $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$ soit diagonalisable. Alors D est un sous-groupe fermé de S isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^d$. Nous considérons dans la suite la variété homogène $X = S/D$. Les groupes S et D étant des groupes complexes réductifs, un théorème de Y. Matsushima affirme que X est une variété homogène de Stein (voir [12]).

Soit K un sous-groupe maximal compact de S et $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie, qui est une forme réelle de l'algèbre $\mathfrak{s}$.

Le groupe K agit sur la variété complexe X par multiplication à gauche. On se propose d'étudier les enveloppes holomorphiquement convexes $\widehat{K(x)}$ des orbites $K(x)$, $x \in X$:

$$\widehat{K(x)} = \left\{ y \in X \mid \forall f \in \mathcal{O}(X),\ \left|f(y)\right| \leqslant \max_{K(x)} |f| \right\}.$$

L'action de K sur X étant holomorphe, $\widehat{K(x)}$ est K-invariant.

Pour $x = gD \in X$, notons $\mathrm{Iso}_S(x) = \{s \in S \mid s(x) = x\}$ et $I(x) = \{k \in K \mid k(x) = x\}$. Alors $\mathrm{Iso}_S(x) = gDg^{-1}$ et $I(x) = K \cap gDg^{-1}$. Le groupe $I(x)$ est donc un sous-groupe compact abélien de S. Pour un sous-ensemble E de S et $s \in S$, on notera dorénavant : $E^s = sEs^{-1}$.

PROPOSITION 3.1. – *Soit $x = gD \in X$. L'orbite $K(x) = M = K/I(x)$ munie de la structure* CR *Q induite par X est une sous-variété* CR *homogène compacte génératrice de X avec*

$$n - d \leqslant \dim_{\mathbb{R}} K(x) \leqslant n.$$

Si $\mathfrak{j}$ désigne la sous-algèbre de Lie complexe de $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$ correspondant à cette structure CR *donnée par le Lemme* 2.2, *alors son conjugué complexe $\bar{\mathfrak{j}}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de* $\mathrm{Iso}_S(x) = D^g$.

Démonstration. – La première partie de la proposition est évidente.

La deuxième partie est une conséquence de la Remarque 2.1(2). □

3.1. Orbites totalement réelles

Soit $\mathbf{T}_D$ le sous-groupe maximal compact de D : $\mathbf{T}_D$ est un tore isomorphe à $(S^1)^d$. Les sous-groupes maximaux compacts de S sont les conjugués de K. Donc il existe $g_0 \in S$ tel que $\mathbf{T}_D \subset K^{g_0^{-1}}$, c'est-à-dire $\mathbf{T}_D^{g_0} \subset K$. Soit $0 = g_0 D$. Alors $K^{g_0^{-1}} \cap D$ est un sous-groupe compact de D contenant $\mathbf{T}_D$, qui est donc égal à $\mathbf{T}_D$. Par conséquent $K \cap D^{g_0} = \mathbf{T}_D^{g_0}$. Comme $K(0)$ est isomorphe à $K/(K \cap D^{g_0})$, c'est une sous-variété génératrice de X de dimension $n - d$. Par conséquent $K(0)$ est totalement réelle.

PROPOSITION 3.2. – *La variété $K(0)$ est la seule K-orbite totalement réelle dans X. Elle est holomorphiquement convexe.*

Démonstration. – D^{g_0} est un sous-groupe de Cartan de S. Considérons la variété complexe $X^{g_0} = S/D^{g_0}$. X et X^{g_0} sont biholomorphes par :

$$\begin{aligned} X &\to X^{g_0}, \\ gD &\mapsto gg_0^{-1}D^{g_0}, \end{aligned}$$

qui applique de plus K-orbite de X sur K-orbite de X^{g_0}. On se ramène ainsi au cas où le sous-groupe maximal compact $\mathbf{T}_D$ de D est inclus dans K. Le tore $\mathbf{T}_D$ est alors un tore maximal de K et l'on a $\mathbf{T}_D = K \cap D$. Dans cette situation, il est montré dans [2] que la K-orbite de eD est la seule orbite totalement réelle. On utilise ensuite le fait que l'enveloppe holomorphiquement convexe d'un compact dans une variété de Stein est égale à l'enveloppe par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. Or, toujours d'après [2], si φ est une fonction K-invariante strictement plurisousharmonique sur X, alors φ a des points critiques, ces points critiques sont des minimums et sont tous dans $K(0)$. Par K-invariance, $K(0)$ est l'ensemble où φ prend son minimum, donc est holomorphiquement convexe. □

3.2. Sous-groupes de Cartan des groupes de Lie complexes semi-simples et orbites de dimension maximales

Dans ce paragraphe nous donnons des résultats concernant les sous-groupes de Cartan d'un groupe de Lie semi-simple et étudions les K-orbites de dimension maximale.

LEMME 3.1. – *Soit G un groupe de Lie connexe complexe semi-simple et $H \subset G$ un sous-groupe de Lie connexe réductif. On suppose que*

$$G = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

Alors $G = H$.

Démonstration. – Par hypothèse H contient un élément régulier semi-simple de G. Alors G et H ont le même rang. Soit $g \in G$ un élément régulier unipotent de G. On peut choisir $g \in H$. Soient Z_g and $Z_{g,H}$ les centralisateurs de g dans G et H. On a $\dim_{\mathbb{C}} Z_g = r = \operatorname{rang} G = \operatorname{rang} H$ et $\dim_{\mathbb{C}} Z_{g,H} = r$, puisque G et H ont le même rang. Pour un exposé détaillé des propriétés des éléments réguliers nous citons le livre de R. Steinberg [16].

Supposons que $\mathfrak{h} \subsetneqq \mathfrak{g}$. En utilisant le fait que H est réductif et connexe, on décompose le $(\mathrm{Ad}\,H)$-module $\mathfrak{g}$ en composantes irréductibles et on obtient

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus m \quad \text{avec } m \neq 0.$$

Or, $g \in H$ étant un élément unipotent de G, il existe au moins un vecteur non-trivial dans m qui est stable par $\mathrm{Ad}\,g$. Ce vecteur appartient à l'algèbre de Lie de Z_g. Il s'ensuit que $\dim_{\mathbb{C}} Z_g \geqslant \dim_{\mathbb{C}} Z_{g,H} + 1 \geqslant r + 1$. Cette contradiction termine la démonstration. □

PROPOSITION 3.3. – *Soient G un groupe de Lie complexe connexe semi-simple, $H \subset G$ un sous-groupe complexe algébrique connexe et K un sous-groupe maximal compact de G. Soit $A = \bigcup_{k \in K} kHk^{-1}$. Alors :*

(a) *L'ensemble $A \subset G$ est fermé.*

(b) *Si H est réductif et $H \subsetneqq G$, on a $A \subsetneqq G$.*

Démonstration. – (a) Si $x_i = k_i h_i k_i^{-1} \in A$ converge vers $x \in G$, on peut supposer que $k_i \to k \in K$ et par conséquent $h_i = k_i^{-1} x_i k_i \to k^{-1}xk$. Puisque H est fermé, il s'ensuit que $h := k^{-1}xk \in H$ et $x = khk^{-1} \in A$.

(b) Conséquence du lemme précédent. □

LEMME 3.2. – *Soient G un groupe de Lie complexe semi-simple, K un sous-groupe maximal compact fixé de G, $\mathfrak{g}$ resp. $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie correspondantes et $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ l'involution de $\mathfrak{g}$ donnée par la forme réelle $\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}, \tau(k \otimes \lambda) = k \otimes \overline{\lambda}$). Soient D un sous-groupe de Cartan de G et $\mathfrak{d}$ son algèbre de Lie. On suppose que $\tau(\mathfrak{d}) = \mathfrak{d}$. Soient $G_1, \ldots, G_N \subsetneqq G$ les sous-groupes complexes connexes τ-stables de G, qui contiennent D. On a :*

(i) *L'ensemble*

$$B := \bigcup_{k \in K,\ i=1,\ldots,N} kG_ik^{-1}$$

est fermé et $G \setminus B$ est ouvert et dense dans G.

(ii) *Soit $g \in G \setminus B$ un élément semi-simple, H un sous-groupe de Cartan de G contenant g et $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H. Alors, on a $\mathfrak{h} \cap \tau(\mathfrak{h}) = 0$ et l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ engendrée par le sous-espace $\mathfrak{h} + \tau(\mathfrak{h})$ est égale à $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. – (i) La démonstration du Lemme 3.1 montre que B ne contient aucun élément unipotent régulier de G. La proposition précédente implique que B est fermé et alors que $G \setminus B$ est ouvert et non-vide. Pour montrer que $G \setminus B$ est dense dans G, il suffit de montrer que pour $i \in \{1, \ldots, N\}$, l'ensemble fermé $B_i := \bigcup_{k\in K} kG_ik^{-1}$ est d'intérieur vide. Soit $K_i := K \cap G_i$. La τ-invariance de G_i implique que K_i est un sous-groupe maximal compact et donc une forme réelle de G_i.

On considère maintenant l'action ϕ de K_i sur $K \times G_i$:

$$\phi\bigl(l, (k, g)\bigr) := \bigl(kl^{-1}, lgl^{-1}\bigr), \quad l \in K_i, k \in K, g \in G_i.$$

Le quotient de $K \times G_i$ par l'action ϕ de K_i est noté $K \times_{K_i} G_i =: W$. La projection sur le premier facteur de $K \times G_i$ réalise W comme fibré à fibre G_i et à base K/K_i. On remarque maintenant que l'ensemble B_i est l'image de $K \times G_i$ par l'application $(k, g) \to kgk^{-1}$, qui se factorise par la variété W. La dimension réelle de W satisfait à l'inégalité

$$\dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{R}} K + \dim_{\mathbb{R}} K_i < 2 \dim_{\mathbb{R}} K = \dim_{\mathbb{R}} G,$$

ce qui montre que l'intérieur de B_i est vide.

(ii) Supposons que $\mathfrak{l} \subsetneqq \mathfrak{g}$. Par construction $\mathfrak{l}$ est τ-stable et contient donc une sous-algèbre de Cartan τ-stable $\mathfrak{d}_1$. Il existe un élément $k \in K$ tel que $\mathrm{Ad}(k)(\mathfrak{d}) = \mathfrak{d}_1 \subset \mathfrak{l}$ (*).

Soit $L \subset G$ le sous-groupe connexe correspondant à $\mathfrak{l}$. Nous avons $D \subset k^{-1}Lk$ par (*). Il existe alors $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $k^{-1}Lk = G_i$. Mais $H \subset L$ implique que $g \in L$ et, de plus, $g \in kG_ik^{-1}$, ce qui est contraire à $g \in G \setminus B$. $\square$

COROLLAIRE 3.1. – *Soit K un sous-groupe maximal compact fixé d'un groupe de Lie complexe semi-simple G, $\mathfrak{g}$ resp. $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie correspondantes et $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ l'involution de $\mathfrak{g}$ donnée par la forme réelle $\mathfrak{k}$. Les sous-groupes de Cartan de G étant conjugués deux à deux, ils sont paramétrés par la variété $X = G/D$, où D désigne un sous-groupe de Cartan fixé. Alors l'ensemble $U \subset X$ constitué des sous-groupes D' de Cartan de G avec algèbre de Lie $\mathfrak{d}'$ ayant la propriété que $\mathfrak{d}' \cap \tau(\mathfrak{d}') = 0$ et que l'algèbre de Lie engendrée par $\mathfrak{d}' \oplus \tau(\mathfrak{d}')$ coïncide avec $\mathfrak{g}$, est un ouvert dense de X.*

COROLLAIRE 3.2. – *Soit $V \subset X = S/D$ l'ensemble $x \in X$ tels que $\dim_{\mathbb{R}} K(x) = \dim_{\mathbb{R}} K/I(x) = \dim_{\mathbb{R}} K = n$, c'est-à-dire tel que $I(x)$ est* *un groupe abélien fini. Alors V est un ouvert dense de X contenant l'ensemble U du Corollaire* 3.1.

Soit maintenant un point $x = gD$, $x \in U \subset V \subset X$. En particulier nous avons $\dim_{\mathbb{R}} K(x) = n$. La variété $K(x) = K/I(x)$ est donc une sous-variété CR homogène génératrice de X de type (n,d). L'algèbre $\mathfrak{j}$ désigne la sous-algèbre complexe de $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$ correspondante donnée par le Lemme 2.2. Nous avons $\mathfrak{j} \cap \bar{\mathfrak{j}} = 0$ d'après les Corollaires 3.1, 3.2 et la Proposition 3.1. (On rappelle que $\bar{\mathfrak{j}}$ est l'algèbre de Lie de D^g.)

PROPOSITION 3.4. – *Soit $x \in U$. Alors* $\operatorname{exdim}(K/I(x)) = n - 2d$.

Démonstration. – Nous avons $\operatorname{exdim} M = \dim_{\mathbb{C}} \tilde{\mathfrak{j}} - \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j} \oplus \bar{\mathfrak{j}}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} - \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j} \oplus \bar{\mathfrak{j}}) = n - 2d$. □

COROLLAIRE 3.3. – *Pour $x \in U$, l'enveloppe holomorphiquement convexe $\widehat{K(x)}$ est d'intérieur $\Omega(x)$ non-vide et $K(x) \subset \partial\Omega(x)$.*

Démonstration. – D'après le Lemme 2.5, $\Omega(x)$ est non vide et on a $K(x) \subset \overline{\Omega(x)}$. Comme $\widehat{K(x)}$ est K-invariant, son intérieur $\Omega(x)$ l'est aussi. Si $K(x) \cap \Omega(x)$ était non vide, l'orbite $K(x)$ serait incluse dans $\Omega(x)$, donc, d'après le principe du maximum,

$$\forall f \text{ non-constante dans } \mathcal{O}(X), \quad \max_{K(x)} |f| < \max_{\overline{\Omega(x)}} |f| \leqslant \max_{\widehat{K(x)}} |f|,$$

ce qui donne une contradiction. Donc $K(x) \subset \partial\Omega(x)$. □

COROLLAIRE 3.4. – *Pour $x \in U$, l'intérieur $\Omega(x)$ de $\widehat{K(x)}$ est un domaine de Stein contenant $K(0)$, la seule orbite totalement réelle de X.*

Démonstration. – Soit Ω_0 une composante connexe de Ω. Si Ω_0 n'était pas de Stein, il existerait un point $x \in \partial\Omega_0$ et un voisinage ouvert $U \subset X$ de x, tel que toute fonction holomorphe sur Ω_0 se prolonge sur $\Omega_0 \cup U$. Soit $y \in U \setminus \widehat{K(x)}$. Pour toute fonction holomorphe f sur X, on a alors $|f(y)| \leqslant |f|_{\overline{\Omega_0}} \leqslant |f|_{\widehat{K(x)}}$. Cela donne une contradiction, puisque $y \notin \widehat{K(x)}$.

D'après [2], tout domaine de Stein K-invariant de X contient $K(0)$. Or, chaque composante connexe de $\Omega(x)$ est de Stein, ce qui montre la connexité de $\Omega(x)$. □

3.3. Enveloppes d'intérieur vide

On considère maintenant le cas d'une orbite $K(x)$, $x \in X \setminus U$.

PROPOSITION 3.5. – *Soit $x \in X \setminus U$. Alors l'enveloppe $\widehat{K(x)}$ est d'intérieur vide et contient l'orbite totalement réelle $K(0)$.*

Démonstration. – Nous traitons d'abord le cas d'un point $x = gD \in X$, tel que $\dim_{\mathbb{R}}(K \cap D^g) \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \in X \setminus V$. Soit $\mathfrak{j}$ la sous-algèbre complexe de $\mathfrak{s}$ correspondant à la structure CR invariante sur $K(x) = K/(K \cap D^g)$ et $\widetilde{\mathfrak{j}}$ la plus petite sous-algèbre complexe de $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$ contenant $\mathfrak{j} + \bar{\mathfrak{j}}$. On a $\widetilde{\mathfrak{j}} = \bar{\widetilde{\mathfrak{j}}}$, donc $\widetilde{\mathfrak{j}} = (\widetilde{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{k}) \otimes \mathbb{C}$. Soit $\widetilde{J}$ le sous-groupe connexe complexe associé à $\widetilde{\mathfrak{j}}$. Alors $\widetilde{J} = F^{\mathbb{C}}$, où F est le sous-groupe fermé de K dont l'algèbre de Lie est $\widetilde{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{k}$. Par conséquent, $\widetilde{J}$ est un sous-groupe fermé réductif de S. Donc $S/\widetilde{J}$ est une variété complexe de Stein. En utilisant la Proposition 3.1, l'hypothèse sur x entraine que $\mathfrak{j} \cap \bar{\mathfrak{j}} =: \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre (abélienne) réductive non-triviale de $\mathfrak{j}$ et que $\widetilde{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{k}$ contient une algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{k}$. Un calcul élémentaire utilisant l'identité de Jacobi montre que $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre normale de $\widetilde{\mathfrak{j}}$. Alors $\widetilde{\mathfrak{j}}$ est une sous-algèbre propre de $\mathfrak{s}$ et $\widetilde{J}$ est un sous-groupe propre de S. Ceci montre que la variété $S/\widetilde{J}$ est de dimension strictement positive. Le groupe D^g est un sous-groupe de $\widetilde{J}$. Soit

$$p : X^g = S/D^g \to S/\widetilde{J}$$

la fibration induite et soit $\tilde{x} = p(x)$. Alors $K(\tilde{x}) = K/(K \cap \widetilde{J})$ est l'unique orbite totalement réelle de $S/\widetilde{J} = K^{\mathbb{C}}/(K \cap \widetilde{J})^{\mathbb{C}}$ (voir [2]).

Par conséquent,

$$\widehat{K(x)} \subset p^{-1}\big(\widehat{K(\tilde{x})}\big)$$

est d'intérieur vide.

Ecrivons maintenant $\{x\}$ comme intersection décroissante de compacts V_j d'intérieur non vide : $\{x\} = \bigcap_{j \geqslant 0} V_j$. Alors $K(x) = \bigcap_{j \geqslant 0} KV_j$. L'intersection étant décroissante, on montre facilement que

$$\widehat{K(x)} = \bigcap_{j \geqslant 0} \widehat{KV_j}.$$

D'après la Proposition 3.1, l'ensemble des points ayant une orbite dont l'enveloppe est de dimension maximale est dense dans X. Alors chaque compact V_j contient au moins un de ces points, disons x_j. D'après le Corollaire 3.4, $\widehat{K(x_j)}$ contient $K(0)$. Par conséquent, $K(0) \subset \widehat{K(x)}$.

Supposons maintenant que $x = gD \in V \setminus U$. Soit encore $\mathfrak{j}$ la sous-algèbre complexe de $\mathfrak{s}$ correspondant à la structure CR invariante sur $K(x) = K/(K \cap D^g)$ et $\tilde{\mathfrak{j}}$ la plus petite sous-algèbre complexe de $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$ contenant $\mathfrak{j} + \bar{\mathfrak{j}}$. Par hypothèse $\tilde{\mathfrak{j}} \subsetneq \mathfrak{g}$ et on raisonne comme dans le premier cas pour terminer la démonstration. □

3.4. Enveloppes de dimension maximale

Notons $\pi : S \to S/D = X$ et $p : S \to K\backslash S$ les fibrations canoniques.

LEMME 3.3. – *Soit $\kappa \subset X$ un compact holomorphiquement convexe et $\tilde{\kappa} := \pi^{-1}(\kappa) \subset S$. Alors, pour tout compact $\eta \subset \tilde{\kappa} \subset S$, on a :*

$$\pi\left(\hat{\eta}_{\mathcal{O}(S)}\right) \subset \kappa.$$

Démonstration. – Pour tout $x \in X \setminus \kappa$, il existe une fonction plurisousharmonique u sur X tel que $u(x) > \max_\kappa u$. Le fait que $u \circ \pi$ est plurisousharmonique sur S démontre le lemme. □

LEMME 3.4. – *Soit $\kappa \subset X = S/D$ un compact K-invariant holomorphiquement convexe et $\tilde{\kappa} := \pi^{-1}(\kappa) \subset S$. Alors $\tilde{\kappa}$ est K-invariant à gauche, c.a.d. $p^{-1}(p(\tilde{\kappa})) = \tilde{\kappa}$ et pour deux points $q_1, q_2 \in p(\tilde{\kappa})$ on a :*

$$p^{-1}\left(\mathrm{Geod}(q_1, q_2)\right) \subset \widehat{p^{-1}\{q_1, q_2\}} \subset \tilde{\kappa},$$

où $\mathrm{Geod}(q_1, q_2)$ *désigne l'unique segment géodésique joignant q_1 et q_2 dans $K\backslash S$.*

Démonstration. – L'espace homogène $K\backslash S$ muni d'une métrique riemannienne S-invariante est une variété riemannienne globalement symétrique et pour deux points distincts il y a un segment géodésique unique joignant ces points. (Voir [8]). Par [3], p. 1336, Prop. 3.9., nous avons pour deux points $q_1, q_2 \in K\backslash S$:

$$p^{-1}\left(\mathrm{Geod}(q_1, q_2)\right) \subset \widehat{p^{-1}\{q_1, q_2\}}.$$

On applique le Lemme 3.3 à $\eta := p^{-1}(\{q_1, q_2\})$, avec $q_1, q_2 \in p(\tilde{\kappa})$, pour terminer la démonstration. □

LEMME 3.5. – *Soit $B \subset K\backslash S$ un compact tel que pour l'intérieur Ω de B on ait $\overline{\Omega} = B$. Soit*

$$q \in (K\backslash S) \setminus B \quad et \quad \kappa := \big(p^{-1}\widehat{(B \cup \{q\})}\big).$$

Alors pour l'intérieur Ω' de κ on a :

$$p^{-1}(q) \subset \overline{\Omega'}.$$

Démonstration. – D'après le lemme précédent, il est clair que $p(\kappa)$ contient tous les ensembles de la forme $\mathrm{Geod}(q,x)$, $x \in B$. Le lemme est maintenant une conséquence de ([8], Ch. 1, Thm. 13.3). □

On revient au cas où $\dim_{\mathbb{R}} K(x) = n$, $x \in U$; $\Omega(x)$ désigne toujours l'intérieur de $\widehat{K(x)}$.

THÉORÈME 3.1. – $\widehat{K(x)} = \overline{\Omega(x)}$.

Démonstration. – Supposons qu'il existe $y \in \widehat{K(x)} \setminus \overline{\Omega(x)}$. On a $\widehat{K(y)} \subset \widehat{K(x)}$. Soit $\tilde{\kappa} = \pi^{-1}(\widehat{K(x)}) \subset S$. Soit $B \subset \pi^{-1}(\Omega(x)) \subset S$ un compact K-invariant dont l'adhérence de l'intérieur est égale à B. Soit $\tilde{y} \in \pi^{-1}(y)$. Alors l'ensemble $B' := K(\tilde{y}) \cup B$ est un compact K-invariant de S. Le Lemme 3.5 implique que l'ensemble $E := \widehat{B'}$ a la propriété que $\tilde{y}$ est contenu dans l'adhérence de son intérieur. Les Lemmes 3.3 et 3.4 montrent maintenant que $y \in \overline{\Omega(x)}$. □

Remarque 3.1. – (1) Dans le cas plus général où H est un sous-groupe complexe fermé de S contenant un sous-groupe de Cartan et $X := S/H$, il est possible d'obtenir des résultats analogues au théorème principal.

(2) On se propose d'étudier dans un futur papier la structure analytique-complexe des domaines $\Omega(x)$, $x \in U$, en particulier les bords $\partial\Omega(x)$.

Remerciements

Les auteurs remercient A.T. Huckleberry, J.J. Loeb et A. Sukhov pour des discussions enrichissantes et, en particulier, D.N. Akhiezer pour avoir aidé à la Section 3.2.

RÉFÉRENCES

[1] Akhiezer D.N., Invariant plurisubharmonic functions and geodesic convexity, Expo. Math. 11 (1993) 261–270.

[2] Azad H., Loeb J.-J., On a theorem of Kempf and Ness, Indiana University Math. J. 39 (1990) 61–65.

[3] Fels G., A differential-geometric characterisation of invariant domains of holomorphy, Ann. Inst. Fourier 45 (5) (1995) 1329–1351.

[4] Fels G., Huckleberry A.T., A characterisation of K-invariant Stein domains in symmetric embeddings, in: Complex Analysis and Geometry, Plenum Press, New York, 1993.

[5] Greenfield S., Cauchy–Riemann equation in several variables, Ann. Sc. Norm. Pisa, Serie III 22 (1968) 275–314.

[6] Gilligan B., Huckleberry A.T., On non-compact complex nilmanifolds, Math. Ann. 238 (1978) 39–49.

[7] Heinzner P., Geometric invariant theory on Stein spaces, Math. Ann. 289 (1991) 631–662.

[8] Helgason S., Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1978.

[9] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of Differential Geometry I, Wiley, New York, 1963.

[10] Loeb J.J., Pseudo-convexité des ouverts invariants et convexité géodésique dans certains espaces symétriques, in: Séminaire Lelong–Dolbeault–Skoda, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1984.

[11] Loeb J.J., Action d'une forme de Lie réelle d'un groupe de Lie complexe sur les fonctions plurisousharmoniques, Ann. Inst. Fourier 35 (1985) 59–97.

[12] Matsushima Y., Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes, Nagoya Math. J. 16 (1960) 205–218.

[13] Richthofer W., Homogene CR-Mannigfaltigkeiten, Dissertation, Bochum, 1985.

[14] Rothaus O.S., Envelopes of holomorphy of domains in complex Lie groups, in: Problems in Analysis, Symposium in honor of Salomon Bochner, 1969, Princeton University Press, 1970.

[15] Sacré C., Enveloppe holomorphe d'orbite dans une variété de Stein, Pub. IRMA, LILLE 35 (8) (1994) ; Preprint series Lille 1.

[16] Steinberg R., Conjugacy classes in algebraic groups, Lect. Notes Math., Vol. 366, 1974.

[17] Tumanov A., Extension of CR-functions into a wedge from a manifold of finite type, Math. USSR Sbornik 64 (1) (1989) 129–140.